CAPÍTULO 4

Descubrimiento y prueba de las propiedades de los triángulos

Resumen del contenido

En el Capítulo 4, los estudiantes exploran las propiedades de los triángulos y las condiciones que garantizan que dos triángulos sean congruentes. Al principio los estudiantes hacen conjeturas sobre la suma de los ángulos internos y externos, las propiedades de los triángulos isósceles y las relaciones de desigualdad entre los lados y los ángulos de los triángulos. Luego exploran las características necesarias para determinar la congruencia de dos triángulos, y finalmente, aprenden a usar esto para demostrar sus conjeturas.

Relaciones de los ángulos en los triángulos

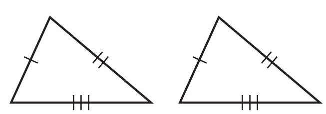
Los estudiantes experimentan, buscan patrones y hacen conjeturas sobre las partes de los triángulos. Estas conjeturas clave resultan de sus investigaciones:

- La suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180°.
- Dos ángulos de un triángulo son congruentes si y sólo si dos lados del triángulo son congruentes.
- La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos que no son adyacentes a este ángulo externo.

Congruencia de triángulos

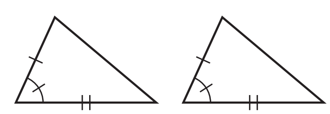
La idea de congruencia sirve como puente entre las propiedades de un triángulo en particular y las propiedades compartidas por dos o más triángulos. En cierto sentido, la congruencia se trata de determinación. Conocer los tres ángulos y los tres lados ciertamente determina un triángulo. En otras palabras, si usted dibuja un segundo triángulo con todos los lados y ángulos congruentes con aquellos en el primer triángulo, el segundo triángulo será congruente con el primero. Esencialmente será el mismo triángulo. Entonces, conocer tres ángulos y tres lados garantiza el tamaño y la forma del triángulo, y todos los triángulos que comparten ese conjunto de medidas tienen garantizada la congruencia entre sí. Pero, ¿un triangulo es determinado por menos de seis piezas de información? Por ejemplo, ¿es suficiente conocer tres ángulos para determinar un triángulo? ¿Es suficiente conocer dos lados y un ángulo? De la misma manera, ¿cómo puede decir si dos triángulos son congruentes? ¿Son congruentes si sus tres ángulos tienen las mismas medidas? O, ¿si dos lados y un ángulo son iguales? Este libro denomina a estas conjeturas *medios rápidos de congruencia*. Estos medios rápidos que son suficientes para garantizar la congruencia están listados a la derecha.

Lado-Lado-Lado (SSS)



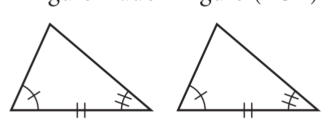
Tres pares de lados congruentes

Lado-Ángulo-Lado (SAS)



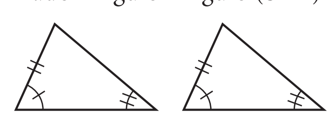
Dos pares de lados congruentes y un par de ángulos congruentes (ángulos entre los pares de lados)

Ángulo-Lado-Ángulo (ASA)



Dos pares de ángulos congruentes y un par de lados congruentes (lados que están entre los pares de ángulos)

Lado-Ángulo-Ángulo (SAA)



Dos pares de ángulos congruentes y un par de lados congruentes (lados que no están entre los pares de ángulos)

(continúa)

Prueba

Una razón importante para desarrollar medios rápidos de congruencia para triángulos es demostrar otras propiedades de las figuras geométricas. El Capítulo 4 expone dos formatos para presentar las pruebas que se utilizarán en lo que queda del curso. La *prueba de párrafo,* expuesta al principio del capítulo, es un argumento deductivo que utiliza oraciones escritas para respaldar sus afirmaciones con razones. La *prueba de organigrama,* expuesta cerca del final del capítulo, ubica afirmaciones en casilleros conectados por flechas para mostrar el flujo de la lógica, presentando las razones lógicas debajo de cada casillero. En las últimas tres lecciones del capítulo, los estudiantes aplican medios rápidos de congruencia de triángulos usando estos formatos de prueba para demostrar las propiedades de los triángulos que descubrieron a lo largo del capítulo.

Problema resumen

Suponga que conoce la longitud de la altitud desde la base de un triángulo isósceles y la medida de un ángulo entre la base y otro de los lados. ¿Esta información es suficiente para determinar un triángulo o existen diferentes triángulos posibles?

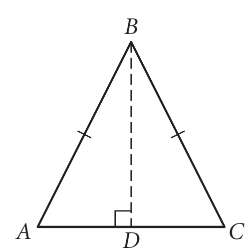
Preguntas que puede hacerle en su rol de estudiante a su estudiante:

- ¿Te ayuda el dibujar altitudes y ángulos particulares, y tratar de formar más de un triángulo con las propiedades dadas?
- ¿Crees que es posible hacer más de un triángulo? ¿Por qué?
- ¿Puedes usar la conjetura de la suma angular en triángulos para ayudar a explicar por qué?
- ¿Puedes usar la conjetura del triángulo isósceles para ayudar a explicar por qué?
- ¿Puedes usar medios rápidos de congruencia para ayudar a explicar por qué?
- ¿Puedes usar la conjetura de la bisectriz del ángulo del vértice para ayudar a explicar por qué?
- ¿Qué sucede si el triángulo no es isósceles?

Ejemplos de respuestas

Hacer y rotular un diagrama es una buena técnica para ayudar a pensar acerca de un problema. En este caso, el dibujar le mostrará que sólo hay un triángulo posible con una altitud de la longitud específica que usted dibujó y con el ángulo que dibujó entre la base del triángulo y otro de sus lados. Para explicar por qué, su estudiante utilizará varias conjeturas. Aquí se presenta una explicación, pero pídale a su estudiante que le dé otras explicaciones.

Como conoce uno de los ángulos de la base, también conoce el otro por la conjetura del triángulo isósceles. La altitud del triángulo isósceles lo divide en dos triángulos rectángulos ya que la altitud se define como perpendicular a la base. Ambos triángulos rectángulos tienen dos ángulos y un lado (en realidad, dos si consideramos la altitud compartida) iguales. Según la conjetura de congruencia SAA, tales triángulos son congruentes. Por ende, si construye un nuevo triángulo isósceles con la misma altitud y ángulo de la base dados, estará compuesto de dos de los mismos triángulos rectángulos congruentes, entonces está determinado.



Otras explicaciones podrían utilizar la conjetura de la bisectriz del ángulo del vértice junto con cualquiera de los medios rápidos de congruencia para ayudar a explicar por qué las dos mitades del triángulo isósceles son congruentes.

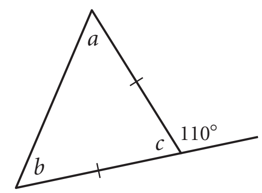
Note que estos argumentos fallan cuando se aplican a un triángulo que no es isósceles. El segundo “ángulo de la base” del triángulo no necesariamente es congruente con el primero. Para ver esto, pídale a su estudiante que dibuje algunos triángulos no congruentes que tengan una altitud dada y un ángulo dado entre la base y uno de los lados. En el diagrama de la derecha, si se le da $\angle A$, $\overline{AB}$, y la altitud $\overline{AD}$, puede colocar el punto C en cualquier lugar a lo largo de $\overleftrightarrow{AD}$ si el triángulo no es isósceles.

Capítulo 4 • Ejercicios de repaso

Nombre ____ **Período** ____________ **Fecha** _______________

(Lecciones 4.1, 4.2) Para los Ejercicios 1 y 2, halla las medidas faltantes.

1. Calcula la medida de cada ángulo con letra y explica cómo la hallaste.

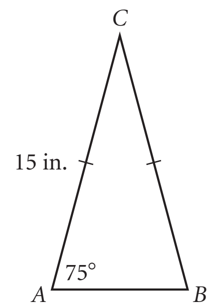


2. El perímetro de $\triangle ABC$ es de 36 pulg.

$BC = \underline{\ ?\ }$

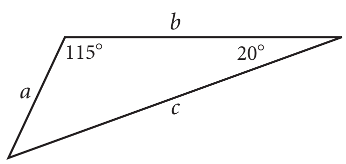
$AB = \underline{\ ?\ }$

$m\angle C = \underline{\ ?\ }$

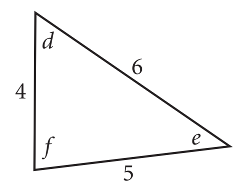


(Lección 4.3) Para los Ejercicios 3 y 4, ordena las tres medidas desconocidas en orden de mayor a menor.

3.

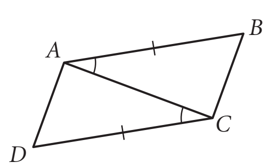


4.

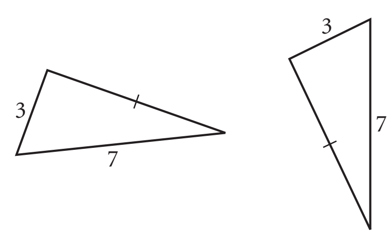


(Lecciones 4.4, 4.5) Para los Ejercicios 5 y 6, decide si los triángulos son congruentes. Si lo son, nombra el medio rápido de congruencia que usaste.

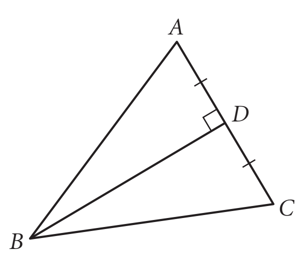
5.



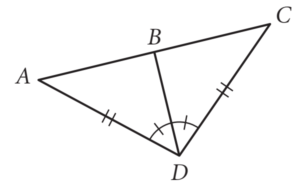
6.



7. *(Lecciones 4.6, 4.7)* Crea una prueba de organigrama para demostrar que $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.



8. *(Lección 4.8)* Escribe una prueba de párrafo para mostrar que $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.



SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

1.

$c = 70°$	Suplemento de 110°.
$a = b$	Conjetura del triángulo isósceles.
$a + b + 70° = 180°$	Conjetura de la suma angular en triángulos.
$a + a + 70° = 180°$	Sustitución.
$2a + 70° = 180°$	Combina términos similares.
$2a = 110°$	Resta.
$a = 55°$	División.
$b = 55°$	Sustitución.

2.

$BC = 15$ pulg	Definición de un triángulo isósceles.
$AB + 15 + 15 = 36$	Perímetro.
$30 + AB = 36$	Suma.
$AB = 6$ pulg	Resta.
$m\angle B = 75°$	Conjetura del triángulo isósceles.
$75° + 75° + m\angle C = 180°$	Conjetura de las suma angular en triángulos.
$150° + m\angle C = 180°$	Suma.
$m\angle C = 30°$	Resta.

3. $c > b > a$ c es opuesto al ángulo más grande y a es opuesto al ángulo más pequeño.

4. $f > d > e$ f es opuesto al ángulo más grande y e es opuesto al ángulo más pequeño.

5. Sí, $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ según SAS.

6. Sí, los triángulos son congruentes según SSS.

7. Ver al final de la página.

8. Se nos da que $\overline{AD} \cong \overline{CD}$ y $\angle ADB \cong \angle CDB$. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ porque es el mismo segmento, entonces $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ según SAS. Por lo tanto, $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ según CPCTC (las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes).

7.