LECCIÓN CONDENSADA

3.1 Ecuaciones lineales y secuencias aritméticas

En esta lección

- Escribirás **fórmulas explícitas** para secuencias aritméticas
- Escribirás **ecuaciones lineales** en **forma de intersección *y***

En el Capítulo 1 conociste las *fórmulas recursivas*. Usar una fórmula recursiva para encontrar un término lejano en una secuencia puede resultar tedioso. Por ejemplo, para encontrar el valor de u_{72}, primero tienes que encontrar los valores de u_1 hasta u_{71}. Una **fórmula explícita** te dice cómo calcular cualquier término de la secuencia sin calcular los términos anteriores. La fórmula recursiva y la fórmula explícita siguientes representan la misma secuencia.

Fórmula recursiva	**Fórmula explícita**
$u_0 = 5$	$u_n = 5 + 7n$
$u_n = u_{n-1} + 7 \quad \text{donde } n \geq 1$	

Usa ambas fórmulas para calcular los primeros términos de la secuencia. ¿Obtienes los mismos resultados? Para encontrar el valor de u_{72} usando la fórmula explícita, sustituye n por 72: $u_{72} = 5 + 7(72) = 509$. Para saber más sobre las fórmulas explícitas, lee el texto hasta el Ejemplo A en tu libro. Después trabaja el siguiente ejemplo.

EJEMPLO

Considera la secuencia aritmética definida recursivamente

$u_0 = 13$

$u_n = u_{n-1} - 3 \quad \text{donde } n \geq 1$

a. Encuentra una fórmula explícita para la secuencia.

b. Usa la fórmula explícita para encontrar u_{17}.

c. Encuentra el valor de n de manera que $u_n = -50$.

▶ ***Solución***

a. Para generar los términos, empiezas en 13 y vas restando 3 para lograr cada término:

$u_0 = 13$

$u_1 = 10 = 13 - 3 = 13 - 3 \cdot 1$

$u_2 = 7 = 13 - 3 - 3 = 13 - 3 \cdot 2$

$u_3 = 4 = 13 - 3 - 3 - 3 = 13 - 3 \cdot 3$

Cada término es igual a 13 menos 3 multiplicado por el número del término. Así pues, la fórmula explícita para el enésimo término es

$u_n = 13 - 3n$

(continúa)

b. Comienza con la fórmula explícita y sustituye n por 17.

$u_{17} = 13 - 3(17) = -38$

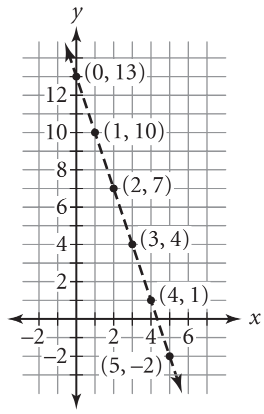
c. Sustituye u_n por -50 en la fórmula explícita y resuelve para n.

$-50 = 13 - 3n$ Sustituye u_n por -50.

$-63 = -3n$ Resta 13 de ambos lados.

$n = 21$ Divide ambos lados entre -3.

La variable n en la fórmula explícita $u_n = 13 - 3n$ representa un número entero. Así pues, si graficas la secuencia de pares ordenados (n, u_n), obtienes un conjunto de puntos discretos.



Los puntos caen en una recta que tiene una pendiente igual a -3, la diferencia común de la secuencia aritmética. El punto (0, 13), que corresponde al término inicial de la secuencia, es la intersección y de la recta. Así pues, la ecuación para la recta que pasa por los puntos es $y = 13 - 3x$, ó $y = -3x + 13$.

En este curso, usarás x e y para escribir ecuaciones lineales, y n y u_n para escribir fórmulas recursivas y explícitas para secuencias de puntos discretos.

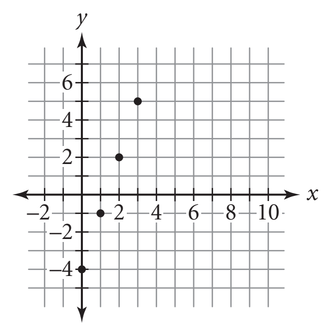
Investigación: Punto de concordancia

Paso 1 En la investigación de tu libro se dan tres fórmulas recursivas, tres gráficas, y tres ecuaciones lineales. Agrupa las fórmulas, gráficas, y ecuaciones que concuerdan. Si falta una fórmula, una gráfica, o una ecuación, será necesario que tú mismo la hagas. Cuando termines, lee las respuestas que se muestran a continuación.

1, B, $y = 4 - x$ La secuencia de la Fórmula 1 tiene un valor inicial de 4 y una diferencia constante de -1. Por tanto, la gráfica debe tener un punto en (0, 4), y después cada punto subsiguiente debe ser 1 unidad menor que el punto anterior. La Gráfica B se ajusta a esta descripción. El valor inicial, 4, es la intersección y de la recta que pasa por los puntos, y la diferencia constante, -1, es la pendiente. Así pues, la ecuación lineal es $y = 4 - x$.

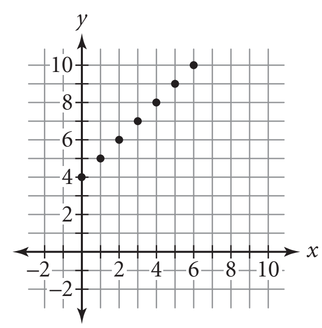
2, C, iii La secuencia de la Fórmula 2 tiene un valor inicial de 2 y una diferencia constante de 5. Por tanto, la gráfica debe tener un punto en (0, 2), y después cada punto subsiguiente debe ser 5 unidades mayor que el punto anterior. La Gráfica C se ajusta a esta descripción. El valor inicial, 2, es la intersección y de la recta que pasa por los puntos, y la diferencia constante, 5, es la pendiente. Así pues, la ecuación lineal es $y = 2 + 5x$, que es la Ecuación iii.

(continúa)



3, ver la gráfica de la derecha, i La secuencia de la Fórmula 3 tiene un valor inicial de -4 y una diferencia constante de 3. Por tanto, la gráfica debe tener un punto en $(0, -4)$, y después cada punto subsiguiente debe ser 3 unidades mayor que el punto anterior. Esto se muestra en la gráfica aquí expuesta. El valor inicial, -4, es la intersección y de la recta que pasa por los puntos, y la diferencia constante, 3, es la pendiente. Así pues, la ecuación lineal es $y = -4 + 3x$, que es la Ecuación i.

A, $u_0 = 3$ y $u_n = u_{n-1} + 2$ donde $n \geq 1$, $y = 3 + 2x$ La Gráfica A tiene un punto en $(0, 3)$, y después cada punto subsiguiente debe ser 2 unidades mayor que el punto anterior, de manera que la secuencia correspondiente a la Gráfica A tiene un valor inicial de 3 y una diferencia constante de 2. Esta secuencia tiene una fórmula recursiva $u_0 = 3$ y $u_n = u_{n-1} + 2$ donde $n \geq 1$. La recta que pasa por los puntos de la Gráfica A tiene una pendiente de 2 y una intersección y en 3, de manera que su ecuación es $y = 3 + 2x$.



ii, $u_0 = 4$ y $u_n = u_{n-1} + 1$ donde $n \geq 1$, ve la gráfica de la derecha La secuencia correspondiente a la Ecuación ii tiene un valor inicial de 4 y una diferencia constante de 1, de manera que su fórmula es $u_0 = 4$ y $u_{n-1} + 1$ donde $n \geq 1$. La gráfica de la secuencia tiene un punto en $(0, 4)$, y después cada punto subsiguiente es 1 unidad mayor que el punto anterior, como se muestra en esta gráfica.

Paso 2 El valor inicial de una secuencia aritmética es la intersección y de la recta que pasa por los puntos y el valor de a en la ecuación de la recta, $y = a + bx$. La diferencia común de una secuencia aritmética es la pendiente de la recta a través de los puntos y el valor de b en la ecuación de la recta, $y = a + bx$.

Paso 3 Los puntos (n, u_n) de una secuencia aritmética siempre son colineales porque para llegar de un punto al siguiente, siempre se avanza 1 unidad hacia adelante y b unidades hacia arriba, donde b es la diferencia constante. Por lo tanto, la pendiente entre cualesquier dos puntos es b, de manera que deben estar en la misma recta.

En el Ejemplo B de tu libro se te ofrece más práctica con las fórmulas explícitas y las ecuaciones lineales. Trabaja el ejemplo por tu cuenta, y después lee el resto de la lección.

LECCIÓN CONDENSADA

3.2

Nueva visita a la pendiente

En esta lección

- Usarás la **fórmula de la pendiente**
- Llevarás a cabo un experimento y encontrarás una recta que se ajuste a los datos
- Identificarás la **variable dependiente,** la **variable independiente,** el **dominio,** y el **rango** de una relación

En cursos anteriores de matemáticas, aprendiste que la fórmula para la pendiente de la recta entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$pendiente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

donde $x_1 \neq x_2$.

Para cualesquier dos puntos en la misma recta, obtendrás la misma pendiente. En otras palabras, una recta tiene una sola pendiente.

Las rectas horizontales son las únicas rectas que tienen dos puntos con el mismo valor y. (De hecho, todo punto en una recta horizontal tiene el mismo valor y.) Puedes ver a partir de la fórmula que la pendiente de una recta horizontal es 0.

Las rectas verticales son las únicas rectas que tienen dos puntos con el mismo valor x. (De hecho, todo punto en una recta vertical tiene el mismo valor x.) La pendiente de una recta vertical no se define porque el denominador en la fórmula de la pendiente es 0.

Como sabes, cuando una ecuación lineal se escribe en **forma de intersección *y*,** $y = a + bx$, la pendiente de la recta es b, el coeficiente de x. Muchos libros usan la letra m para representar la pendiente, pero nosotros usaremos la letra b.

Cuando los datos reales muestran una tendencia lineal, puedes ajustar una recta a los datos. A menos que los datos sean exactamente lineales, la pendiente de la recta dependerá de los puntos que hayas elegido para dibujar la recta que pasa por ellos.

Cuando analizas la relación entre dos variables, es necesario que decidas qué variable expresar en términos de la otra. Cuando una variable depende de otra variable, se llama la **variable dependiente.** La otra variable se llama la **variable independiente.** También necesitas pensar en el dominio y el rango de la relación. El **dominio** es el conjunto de valores x posibles, y el **rango** es el conjunto de valores y posibles.

Investigación: Despegue del globo

En esta investigación, escribirás una ecuación para la distancia entre un cohete-globo y un sensor, como una función de tiempo.

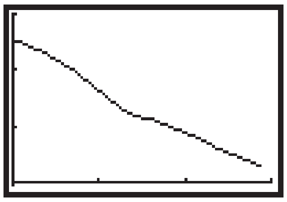
Lee el Procedure Note (nota de procedimiento) y los Pasos 1 y 2 en tu libro. Si tienes los materiales para hacer el experimento y un amigo que te pueda ayudar, reune tus propios datos. De otra manera, usa estos datos de muestra. Completa los pasos por tu cuenta, antes de leer los resultados presentados aquí.

(continúa)

Tiempo (s)	Distancia (m)
0	2.5
0.02	2.49462
0.04	2.467298
0.06	2.381489
0.08	2.337554
0.1	2.277556
0.12	2.216872
0.14	2.133946
0.16	2.046077
0.18	1.9534
0.2	1.85798
0.22	1.75762
0.24	1.65643
0.26	1.55429
0.28	1.45969
0.3	1.37168
0.32	1.29741
0.34	1.237
0.36	1.18908

Tiempo (s)	Distancia (m)
0.38	1.14803
0.4	1.11178
0.42	1.07801
0.44	1.04135
0.46	1.00016
0.48	0.95307
0.5	0.89870
0.52	0.83225
0.54	0.777
0.56	0.71692
0.58	0.64759
0.6	0.59597
0.62	0.54064
0.64	0.48544
0.66	0.43986
0.68	0.38879
0.7	0.35172
0.72	0.30737

Paso 3 Ésta es una gráfica de los datos, en donde el tiempo es la variable independiente. El dominio de los datos es $0 \leq x \leq 0.72$, y el rango es $0.30737 \leq y \leq 2.5$. El dominio indica el número de segundos en que el cohete está en movimiento. El rango indica la distancia que viaja.



[0, 0.75, 0.25, −0.05, 3, 1]

Paso 4 Usaremos $A(0.02, 2.49462)$, $B(0.18, 1.9534)$, $C(0.4, 1.11178)$, y $D(0.7, 0.35172)$ como puntos representativos.

Pendiente entre A y B: -3.3826
Pendiente entre A y C: -3.6391
Pendiente entre A y D: -3.1513
Pendiente entre B y C: -3.8255
Pendiente entre B y D: -3.0802
Pendiente entre C y D: -2.5335

Paso 5 Todas las pendientes son distintas porque los cuatro puntos no caen todos en la misma recta. La media de las pendientes es -3.2687 y la mediana es -3.2670. No hay moda. La media y la mediana se encuentran muy cercanas. Cualquiera podría ser una opción razonable para la pendiente representativa. Usaremos la media.

Paso 6 La pendiente indica que la distancia entre el cohete y el sensor disminuye a 3.2687 metros por segundo. En otras palabras, la velocidad del cohete es de 3.2687 metros por segundo.

(continúa)

Lección 3.2 • Nueva visita a la pendiente (continuación)

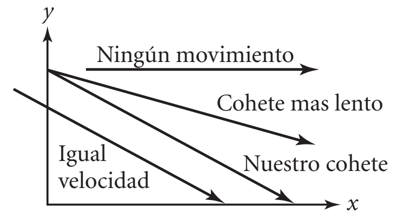
Paso 7 La ecuación para la distancia entre el cohete, y, y el sensor, x segundos después de que se lanza, es $y = 2.5 - 3.2687x$. En esta ecuación, 3.2687 es la velocidad del cohete en m/s, y 2.5 es la distancia inicial entre el cohete y el sensor.

Paso 8 Un cohete que viaja a 75% de la velocidad de nuestro cohete tendría una pendiente de $0.75(-3.2687) = -2.451525$, y su intersección y sería igual. Su ecuación sería $y = -2.451525x + 2.5$.

Si x es el número de segundos transcurridos a partir del lanzamiento de nuestro cohete, entonces $x - 2$ es el número de segundos transcurridos a partir del lanzamiento de un cohete lanzado 2 segundos antes que el nuestro. La ecuación del cohete sería $y = -3.2687(x - 2) + 2.5$.

Un cohete que se lanza a una distancia de 2.5 m del sensor, pero que no se mueve, tiene una ecuación $y = 2.5$.

He aquí las gráficas para los tres cohetes.



Ahora trabaja el ejemplo en tu libro.

LECCIÓN CONDENSADA

3.3 Ajuste de una recta a los datos

En esta lección

- Dibujarás una **recta de ajuste** para un conjunto de datos
- Encontrarás la ecuación para la recta de ajuste y la usarás para **hacer predicciones**

Cuando graficas unos datos reales, algunas veces los puntos muestran una tendencia lineal. Sin embargo, es poco probable que todos los puntos caigan exactamente en una recta. Depende de ti encontrar una recta que resuma o modele los datos. Una recta que se ajusta a un conjunto de datos razonablemente bien se llama una **recta de ajuste.**

Las pautas enumeradas bajo la sección "Finding a Line of Fit" en tu libro te ayudarán a encontrar una recta que se ajuste a un conjunto de datos de manera razonable. Una vez que traces una recta de ajuste, podrás escribir una ecuación que aproxime la relación entre las variables. A partir de la ecuación, puedes hacer predicciones respecto a los valores que caen entre los puntos correspondientes a los datos y más allá de éstos.

Si conoces la pendiente y la intersección y de una recta, fácilmente puedes escribir una ecuación en *forma de intersección y:* a saber, $y = a + bx$. Cuando solamente conoces las coordenadas de dos puntos sobre una recta o la pendiente y las coordenadas de un punto, puedes escribir una ecuación en **forma de punto-pendiente.** Esta forma se resume bajo el título de "Point-Slope Form" en tu libro. Lee esta información atentamente.

En el ejemplo de tu libro se muestra cómo ajustar una recta a un conjunto de datos y después usar la ecuación de la recta para hacer predicciones. Trabaja en el ejemplo. Observa que en la parte b se te pide hacer una predicción para un valor más allá del último año enumerado en la tabla. El proceso de usar un modelo para hacer una predicción *más allá* del primer o último punto de datos se llama **extrapolación.** Encontrar un valor *entre* los puntos de datos dados se llama **interpolación.** Así pues, por ejemplo, si tuvieras que predecir la concentración de CO_2 en 1991, estarías usando la interpolación.

Investigación: La ola

Es probable que hayas visto a los aficionados en los eventos deportivos crear una "ola" al levantarse rápidamente en sucesión, con los brazos levantados, y después sentarse nuevamente. En esta investigación encontrarás una ecuación para modelar la relación entre el número de personas y el período de tiempo necesario para completar la ola.

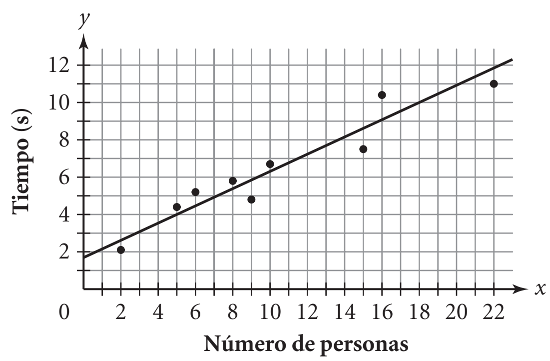
Esta tabla muestra los datos de la ola reunidos en una clase.

Número de personas x	2	5	6	8	9	10	15	16	22
Tiempo (s) y	2.1	4.4	5.2	5.8	4.7	6.7	7.5	10.4	11.0

(continúa)

Lección 3.3 • Ajuste de una recta a los datos (continuación)

He aquí la gráfica de los datos con una recta de ajuste razonable.



La recta pasa por los puntos (5, 4) y (18, 10), así que su pendiente es $\frac{10-4}{18-5} = \frac{6}{13}$. La forma punto-pendiente de la ecuación (usando el punto (5, 4)) es

$$\hat{y} = 4 + \frac{6}{13}(x - 5)$$

La pendiente de la recta, $\frac{6}{13}$, ó aproximadamente 0.46, significa que cada vez que una nueva persona participa, la cantidad de tiempo necesaria para completar una ola se incrementa en 0.46 segundos.

Para encontrar la intersección *y*, reescribe la ecuación en forma de intersección *y*.

$$\hat{y} = 4 + \frac{6}{13}(x - 5)$$

$$\hat{y} = \frac{52}{13} + \frac{6}{13}x - \frac{30}{13}$$

$$\hat{y} = \frac{22}{13} + \frac{6}{13}x$$

La intersección *y* es $\frac{22}{13}$, ó aproximadamente 1.69. Esto significa que 0 personas necesitarían 1.69 segundos para completar la ola. Esto no tiene sentido, así que la intersección *y* no tiene significado en este contexto.

Para encontrar la intersección *x*, sustituye *y* por 0 y resuelve para *x*.

$$0 = \frac{22}{13} + \frac{6}{13}x$$

$$-\frac{22}{13} = \frac{6}{13}x$$

$$-\frac{11}{3} = x$$

Esto significa que en 0 segundos, $-\frac{11}{3}$ personas podrían completar una ola. Esto tampoco tiene sentido, así que la intersección *x* no tiene significado en este contexto.

Tienes los datos de 22 personas, así que un dominio razonable sería de 0 a 22 personas.

Con esta ecuación, si hubiera 750 estudiantes en una escuela, necesitarían $\frac{6}{13}(750) + \frac{22}{13} \approx 348$ segundos para completar la ola. Unas 40,000 personas en un gran estadio necesitarían $\frac{6}{13}(40{,}000) + \frac{22}{13} \approx 18{,}463$ segundos para completar para la ola. ¡Más de 5 horas!

De hecho, en el caso de un grupo grande de personas, la ola va ganando impulso y comienza a viajar más rápido. Así que, en un grupo grande, es posible que los datos no sean lineales.

LECCIÓN CONDENSADA

3.4 La recta mediana-mediana

En esta lección

- Ajustarás la **recta mediana-mediana** a un conjunto de datos

Hasta ahora, has ajustado las rectas a los datos con "una mirada"—es decir, al ver el patrón de los puntos, dibujas una recta que consideras un buen ajuste. Es probable que tú y los demás estudiantes a menudo hayan encontrado diferentes ecuaciones para el mismo conjunto de datos.

Existen varios métodos más formales para encontrar una recta de ajuste. En esta lección, aprenderás un procedimiento para encontrar la **recta mediana-mediana.** Si tú y los demás estudiantes siguen el procedimiento correctamente, todos obtendrán la misma recta de ajuste para el mismo conjunto de datos.

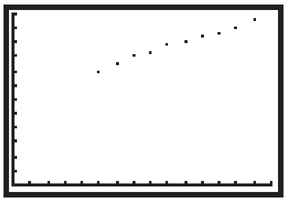
En el texto que precede el ejemplo en tu libro se explica cómo encontrar la recta mediana-mediana. Lee ese texto y después trabaja atentamente el ejemplo. (Además de leer el ejemplo, también debes trabajar en él con lápiz y papel.)

Investigación: Experimento de resorte

Paso 1 La investigación en tu libro describe un experimento en el que fijas diversas masas al extremo de un resorte y después mides la longitud del brinco. Estos datos se reunieron en un experimento similar. Trata de completar los pasos por tu cuenta, antes de leer el texto siguiente.

Masa (g) x	0	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
Longitud del resorte (cm) y	6.4	8	8.5	9	9.3	9.8	10.1	10.5	10.7	11	11.6

Paso 2 Una gráfica de los datos se presenta aquí.



[0, 150, 10, 0, 12, 1]

Paso 3 Aquí se explican los pasos para encontrar la recta mediana-mediana:

1. Ordena los datos según los valores del dominio. (Esto ya se hizo.) Después divide los datos en tres grupos de tamaños iguales. Como los 11 valores no se dividen uniformemente en tres grupos, divídelos en grupos de 4-3-4.

x	0	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
y	6.4	8	8.5	9	9.3	9.8	10.1	10.5	10.7	11	11.6

Encuentra el valor mediano x y el valor mediano y en cada grupo. Los puntos que tienen estos valores medianos se llamarán las coordenadas M_1, M_2, y M_3,

(continúa)

respectivamente. Para estos datos, los valores x e y ya están en orden, así que este paso es bastante sencillo. M_1 es (55, 8.25), M_2 es (90, 9.8), y M_3 es (125, 10.85).

2. Encuentra la pendiente de la recta que pasa por M_1 y M_3. Ésta será la pendiente de la recta mediana-mediana.

$$\textit{pendiente} = \frac{10.85 - 8.25}{125 - 55}$$

3. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por M_1 con la pendiente encontrada en el Paso 2. La ecuación de la recta que pasa por M_3 será igual.

$y - 8.25 = 0.037(x - 55)$ Forma punto-pendiente.

$y - 8.25 = 0.037x - 2.035$ Distribuye 0.037.

$y = 6.215 + 0.037x$ Forma de intersección *y*.

4. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por M_2 con la pendiente encontrada en el Paso 2.

$y - 9.8 = 0.037(x - 90)$ Forma punto-pendiente.

$y - 9.8 = 0.037x - 3.33$ Distribuye 0.037.

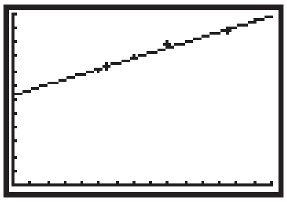
$y = 6.47 + 0.037x$ Forma de intersección *y*.

5. Encuentra la media de las intersecciones y de las rectas que pasan por M_1, M_2, y M_3. (Las intersecciones y de las rectas que pasan por M_1 y M_3 son iguales.)

$$\frac{6.215 + 6.215 + 6.47}{3} = 6.3$$

Así pues, la ecuación de la recta mediana-mediana es $\hat{y} = 6.3 + 0.037x$.

Paso 4 En la gráfica aquí expuesta, los puntos M_1, M_2, y M_3 se muestran con los símbolos +, y se ha añadido la recta mediana-mediana.



[0, 150, 10, 0, 12, 1]

Paso 5 He aquí las respuestas a las preguntas a–f:

a. Si se coloca una masa de 30 g en el extremo del resorte, la longitud sería aproximadamente $6.3 + 0.037(30) = 7.41$ cm.

Si se coloca una masa de 125 g en el extremo del resorte, la longitud sería aproximadamente $6.3 + 0.037(125) = 10.925$ cm.

b. Los puntos (50, 8) y (90, 9.8) son lo que más difieren de los valores predichos por la ecuación, que son (50, 8.15) y (90, 9.63). Es posible que los datos se midieron de manera incorrecta.

c. La pendiente, 0.037, significa que cada vez que la masa se incrementa en 1 g, la longitud del resorte se incrementa 0.037 cm.

d. La intersección *y*, 6.3, significa que cuando no hay ninguna masa en el extremo del resorte, la longitud es aproximadamente 6.3 cm.

e. El dominio va de 0 a 140, y el rango va de 6.4 a 11.6.

f. Ajustar una recta con una mirada es mucho más fácil que calcular la recta mediana-mediana, pero ésta proporciona un modelo estandarizado y objetivo de los datos.

LECCIÓN CONDENSADA

3.5 Residuos

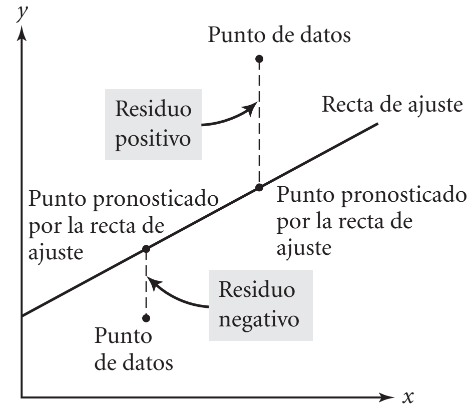
En esta lección

- Calcularás los **residuos** y el **error cuadrático medio** y los usarás para evaluar el ajuste de una recta a un conjunto de datos

Una forma de evaluar el ajuste de una recta a un conjunto de datos es observando los **residuos,** o sea, las distancias verticales entre los puntos del conjunto de datos y los puntos generados por la recta de ajuste.

residuo = valor y del punto de datos − valor y del punto en la recta

Mientras más cerca esté un punto a la recta, más próximo a cero estará su residuo. Un residuo positivo indica que el punto se encuentra por encima de la recta. Un residuo negativo indica que se encuentra por debajo de la recta. Si una recta se ajusta bien, entonces habrá aproximadamente tantos puntos por encima de la recta como por debajo de ésta, de manera que la suma de los residuos será casi cero.



Estudia el Ejemplo A en tu libro, en el que se muestra cómo encontrar e interpretar los residuos.

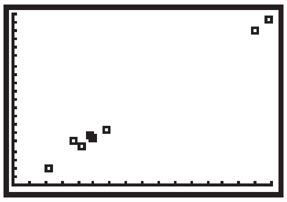
Investigación: Itinerarios de una aerolínea

En esta investigación, crearás un modelo lineal que relacione la distancia y el tiempo de un vuelo de aerolínea. Esta tabla ofrece los tiempos de vuelo y las distancias de Oakland, California, a varias ciudades importantes.

Ciudad	Tiempo de vuelo (min)	Distancia de vuelo (mi)
San Diego, CA	85	445
Reno, NV	45	178
Salt Lake City, UT	95	580
Boise, ID	75	505
Chicago–Midway, IL	300	1816
Nashville, TN	315	1928
Phoenix, AZ	115	636
Portland, OR	100	536

Usa estos datos para completar los Pasos 2–4 en tu libro. Cuando termines, compara tus resultados con los que vienen a continuación.

Paso 2 Aquí se presentan los datos graficados, con el tiempo de vuelo sobre el eje *x,* y la distancia de vuelo sobre el eje *y:*



[0, 320, 20, 0, 2000, 100]

Paso 3 La recta mediana-mediana para los datos es $\hat{y} = -20.0 + 6.1x$.

a. La pendiente 6.1 significa que cuando el tiempo de vuelo se incrementa en 1 minuto, la distancia de vuelo se incrementa en aproximadamente 6.1 millas. En otras palabras, un vuelo promedia 6.1 millas por minuto.

(continúa)

b. La intersección *y*, -20.0, significa que en 0 minutos un avión vuela una distancia de -20.0 millas. Esto no tiene sentido, así que la intersección *y* no tiene significado práctico en este caso.

c. Halla la intersección *x* sustituyendo *y* por 0 y resolviendo para *x*.

$0 = -20.0 + 6.1x$

$x \approx 3.3$

La intersección *x* es aproximadamente 3.3. Esto significa que un avión tarda aproximadamente 3.3 minutos en viajar 0 millas. Esto tampoco tiene sentido, así que la intersección *x* no tiene significado práctico en este caso.

Paso 4 Esta tabla muestra los residuos:

x	85	45	95	75	300	315	115	100
y	445	178	580	505	1816	1928	636	536
$\hat{y}$	498.5	254.5	559.5	437.5	1810	1901.5	681.5	590
$y - \hat{y}$	-53.5	-76.5	20.5	67.5	6.0	26.5	-45.5	-54.0

a. La suma de los residuos es -109, lo que parece algo grande. Sin embargo, los residuos individuales son bastante pequeños en relación con el tamaño de los valores *y*, así que es probable que la recta constituya un ajuste razonable, en el cuál los puntos por debajo de la recta quedan más lejos de la recta que los puntos por encima de ésta.

b. El residuo positivo más grande es 67.5, y el residuo negativo más grande es -76.5. Esto podría indicar que el modelo tiende a sobreestimar las distancias de vuelo.

c. Muchos factores influyen en los tiempos de vuelo, incluyendo la geografía, los vientos predominantes, y el equipo. En general, los vuelos del oeste hacia el este son más rápidos que los vuelos del este al oeste porque los vientos predominantes soplan de oeste a este.

d. Usando el modelo, puedes predecir que un vuelo de 147 minutos es de $-20.0 + 6.1(147) = 876$ millas. Podrías ajustar esta estimación un poco hacia abajo, porque la suma de los residuos es negativa.

La gráfica en la página 144 de tu libro ilustra que es posible que la suma de los residuos se aproxime a 0, incluso si la recta constituye un mal ajuste. Para que una recta sea un buen ajuste, los residuos individuales también deben estar cercanos a 0. Existe, sin embargo, una sola medición que indica el grado en que una recta se ajusta a un conjunto de datos. Esta medición se llama el **error cuadrático medio** (*root mean square error*). Puedes calcular el error cuadrático medio siguiendo estos pasos:

1. Calcula los residuos.
2. Eleva los residuos al cuadrado.
3. Encuentra la suma de los cuadrados de los residuos.
4. Divide esta suma entre el número de los puntos de los datos menos 2.
5. Toma la raíz cuadrada del cociente del paso anterior.

Para saber más sobre el error cuadrático medio, lee el resto de la Lección 3.5 de tu libro. Trata de resolver el problema en el Ejemplo B *sin* ver la solución, y después verifica tu respuesta.

LECCIÓN CONDENSADA

3.6

Sistemas lineales

En esta lección

- Escribirás unos **sistemas de ecuaciones** para representar situaciones reales
- Solucionarás sistemas de ecuaciones usando gráficas y tablas
- Resolverás sistemas de ecuaciones usando una forma sencilla de **sustitución**

Un conjunto de dos o más ecuaciones que tienen las mismas variables y que se resuelven o estudian de manera simultánea se llama un **sistema de ecuaciones.** El Ejemplo A de tu libro muestra un problema real que puedes resolver encontrando la solución de un sistema de ecuaciones. En el ejemplo se muestra que puedes estimar la solución de un sistema graficando las ecuaciones y encontrando el punto donde las gráficas se intersecan, o haciendo una tabla y buscando el valor x para el que los valores y son iguales. Lee el Ejemplo A atentamente.

Investigación: Tendencias poblacionales

Lee la investigación en tu libro y trata de resolver el problema planteado en el Paso 1. Cuando termines, lee el texto siguiente, que describe dos posibles métodos para resolver el problema.

Puedes modelar la población de San José mediante la recta mediana-mediana $\hat{y} = 18535.8x - 36{,}077{,}038$, donde x es el año y y es la población.

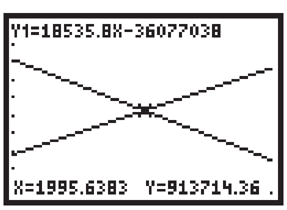
Puedes modelar la población de Detroit mediante la recta mediana-mediana $\hat{y} = -21472.8x + 43{,}764{,}678$, donde x es el año y y es la población.

Puedes introducir las ecuaciones en tu calculadora y hacer una tabla. La tabla indica que la población de San José igualó a la de Detroit entre 1995 y 1996.

X	Y1	Y2
1992	846276	990860
1993	864811	969388
1994	883347	947915
1995	901883	926442
1996	920419	904969
1997	938955	883496
1998	957490	862024

X=1992

También puedes graficar las ecuaciones y rastrear para encontrar el punto de intersección.



[1989, 2002, 1, 683000, 1160000, 50000]

La gráfica también muestra que la población de San José igualó a la de Detroit entre 1995 y 1996.

(continúa)

Lección 3.6 • Sistemas lineales (continuación)

Has visto que puedes estimar una solución de un sistema usando una gráfica o una tabla. En muchos casos, puedes encontrar una solución exacta usando métodos simbólicos.

En el Ejemplo B en tu libro, se demuestra un método. Aprenderás otros métodos en la siguiente lección. Trabaja atentamente en el Ejemplo B y después lee el ejemplo siguiente.

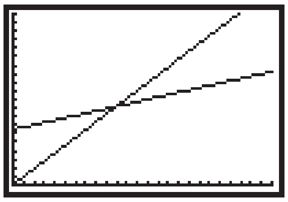
EJEMPLO Josie hace y vende aretes de plata. Ella alquiló un puesto en una feria de arte de fin de semana en $325. Los materiales para cada par de aretes cuestan $6.75, y ella vende cada par en $23. ¿Cuántos pares necesita vender en la feria para cubrir los gastos?

► ***Solución*** Si x es el número de aretes, puedes escribir estas ecuaciones:

$y = 325 + 6.75x$ Gastos de Josie.

$y = 23x$ Ingresos de Josie.

La gráfica muestra que los ingresos de Josie finalmente exceden sus gastos.



[0, 50, 2, 0, 1000, 50]

La intersección representa el punto de equilibrio, cuando los ingresos de Josie se igualan a sus gastos. Puedes encontrar el punto de equilibrio rastreando la gráfica o usando una tabla. También puedes resolver un sistema de ecuaciones. Iguala los lados derechos de las ecuaciones y resuelve para x.

$325 + 6.75x = 23x$ Cuando los gastos de Josie igualan a sus ingresos.

$325 = 16.25x$ Resta $6.75x$ de ambos lados.

$20 = x$ Divide ambos lados entre 16.25.

Josie necesita vender 20 pares de aretes para cubrir los gastos.

LECCIÓN CONDENSADA

3.7 Sustitución y eliminación

En esta lección

- Usarás el **método de sustitución** para resolver unos sistemas de ecuaciones
- Usarás el **método de eliminación** para resolver unos sistemas de ecuaciones

En esta lección se estudian dos métodos para resolver los sistemas de ecuaciones: el método de sustitución y el método de eliminación. Es probable que hayas aprendido estas técnicas en un curso anterior de matemáticas. Para revisar y practicar estos métodos, lee el texto en tu libro que precede la investigación. Después lee el ejemplo siguiente.

EJEMPLO Resuelve este sistema para x e y.

$$\begin{cases} y - 5 = -3x \\ 7x + 3y = 7 \end{cases}$$

Solución Resuelve la primera ecuación para y: $y = 5 - 3x$. Ahora sustituye y por $5 - 3x$ en la segunda ecuación.

$$\begin{aligned} 7x + 3y &= 7 && \text{La segunda ecuación.} \\ 7x + 3(5 - 3x) &= 7 && \text{Sustituye } y \text{ por } 5 - 3x. \\ 7x + 15 - 9x &= 7 && \text{Distribuye 3.} \\ -2x &= -8 && \text{Resta 15 de ambos lados y combina los términos semejantes.} \\ x &= 4 && \text{Divide ambos lados entre } -2. \end{aligned}$$

Ahora que sabes el valor de x, sustitúyelo en cualquiera de las ecuaciones para encontrar el valor de y.

$$\begin{aligned} y - 5 &= -3(4) && \text{Sustituye } x \text{ por 4 en la primera ecuación.} \\ y &= -7 && \text{Multiplica y suma 5 a ambos lados.} \end{aligned}$$

La solución del sistema es $(4, -7)$.

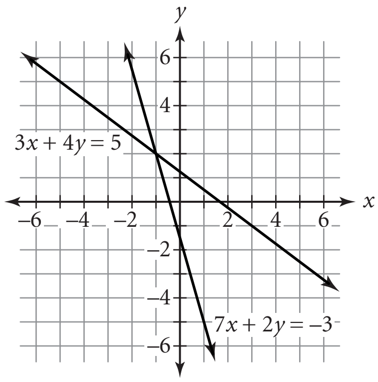
Investigación: Una suma significante

En esta investigación, explorarás lo que sucede cuando multiplicas ambos lados de una ecuación por el mismo número o cuando sumas unas ecuaciones. Trabaja en la investigación por tu cuenta. (Si no hay nadie que pueda trabajar contigo, tendrás que hacer el papel de ambos compañeros.) Después lee los resultados que vienen a continuación.

(continúa)

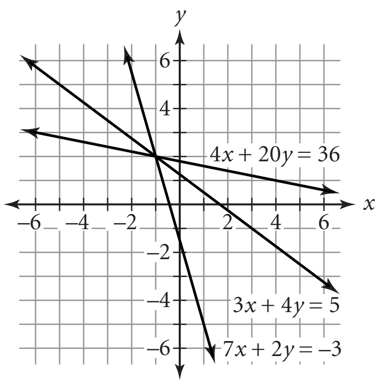
Lección 3.7 • Sustitución y eliminación (continuación)

Paso 1 Las dos ecuaciones se grafican aquí. Parecen intersecarse en $(-1, 2)$.



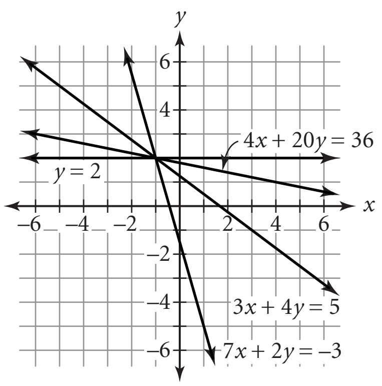
Paso 2 Si $M = -2$ y $N = 6$, entonces las dos nuevas ecuaciones son $-14x - 4y = 6$ y $18x + 24y = 30$.

Paso 3 Sumar estas ecuaciones da $4x + 20y = 36$. A continuación, esta ecuación se grafica sobre los mismos ejes que las rectas originales. La nueva recta y las dos rectas originales se intersecan en $(-1, 2)$.



Paso 4 Al multiplicar la Ecuación 1 original por -3 y la Ecuación 2 original por 7, se obtiene $-21x - 6y = 9$ y $21x + 28y = 35$.

Paso 5 Al sumar las ecuaciones del Paso 4, se obtiene $22y = 44$, que se simplifica a $y = 2$. Ésta es una recta horizontal que pasa por el punto de intersección de las otras tres rectas.



Paso 6 La Ecuación 4, $y = 2$, difiere de las otras porque no tiene término x.

Paso 7 Debes encontrar que multiplicar cada ecuación por un número y después sumar las dos ecuaciones resultantes da como resultado una recta que pasa por las otras dos rectas en su punto de intersección. Esto significa que el punto que es la solución de ambas ecuaciones originales también es una solución de la nueva ecuación.