# Introducción a la geometría

## Resumen del contenido

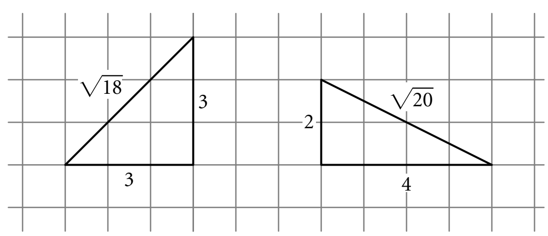
El Capítulo 11 es una vista previa de geometría. Aún así, en algunos lugares ésta utiliza ecuaciones lineales. Los estudiantes también se enfocan en las expresiones radicales y las operaciones con radicales.

### Geometría sintética

El estudio original de la geometría ahora se llama *sintética* para distinguirla de la geometría analítica de los sistemas de coordenadas, la cual se desarrolló mucho más tarde. En el área de la geometría sintética, el libro se enfoca en el Teorema de Pitágoras y en figuras similares—figuras que son estiramientos o encogimientos de cada una por el mismo factor en cada dirección.

### Geometría analítica

La *geometría analítica* es la geometría de las gráficas de coordenadas, las cuales usan ecuaciones algebraicas para representar figuras geométricas. Los estudiantes han estado trabajando con geometría analítica a lo largo de este curso. Ya han visto cómo las rectas paralelas tienen la misma pendiente, y cómo esa pendiente aparece en las ecuaciones de las rectas. En este capítulo verán cómo se relacionan las pendientes y las ecuaciones de rectas perpendiculares. También verán cómo hallar las coordenadas de los puntos medios de segmentos de rectas. Al considerar cómo el Teorema de Pitágoras se traslada a la geometría de coordenadas, los estudiantes aprenden a trabajar con raíces cuadradas.




### Trigonometría

Cuando una figura geométrica se estira o encoje uniformemente, todos los ángulos mantienen sus medidas y todos los lados se multiplican por la misma cantidad; por lo tanto, la razón del largo de un lado a otro permanece igual. Este estiramiento y encogimiento produce *figuras similares,* las cuales tienen ángulos correspondientes iguales y largos de lados correspondientes proporcionales. El estudio de las relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos rectos similares es parte de la *trigonometría*. En particular, en triángulos rectos similares, la razón de, por ejemplo, el largo del lado opuesto a un ángulo agudo particular al largo de la hipotenusa es el mismo, no importa cuál sea el agrandamiento. Cada ángulo agudo de un triángulo recto tiene varias de estas razones asociadas con él. Éstas se llaman *razones trigonométricas.*

El libro considera tres tales razones: el seno, el coseno y la tangente. Los estudiantes usan calculadoras para hallar los valores de estas razones para varios ángulos y, a la inversa, los ángulos que corresponden a varias razones dadas. Ellos, por lo tanto, tienen una vista previa de las consideraciones de trigonometría más profundas que se encuentran en *Discovering Advanced Algebra.*

**(continuado)**

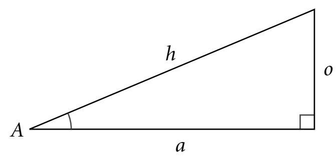
## Funciones trigonométricas

Para un ángulo agudo $A$ en un triángulo recto, las funciones trigonométricas son

$$\text{seno del ángulo } A = \frac{\textit{largo de lado opuesto}}{\textit{largo de hipotenusa}} \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} A = \frac{o}{h}$$

$$\text{coseno del ángulo } A = \frac{\textit{largo de lado adyacente}}{\textit{largo de hipotenusa}} \quad \text{o} \quad \cos A = \frac{a}{h}$$

$$\text{tangente del ángulo } A = \frac{\textit{largo de lado opuesto}}{\textit{largo de lado adyacente}} \quad \text{o} \quad \tan A = \frac{o}{a}$$




## Problema de resumen

Usted y su estudiante pueden volver a visitar este problema, adaptado del Ejercicio 7 en la Lección 11.1, varias veces mientras trabajan a través del capítulo.

¿Qué puedes decir acerca del cuadrilátero con vértices $(-5, 0)$, $(1, 4)$, $(6, 3)$ y $(-3, -3)$?

Preguntas que podría hacer, en su papel de estudiante para su estudiante, incluyen:

- ¿Algunos de los lados parecen ser paralelos?
- ¿Algunos de los lados parecen ser perpendiculares?
- ¿Puedes confirmar tus conjeturas?
- ¿Cuáles son las ecuaciones de las cuatro rectas que contienen los lados del cuadrilátero?
- ¿Las diagonales se encuentran en sus puntos medio?
- ¿Puedes hallar los largos de las diagonales?
- ¿Puedes hallar las medidas de los ángulos?

### Repuestas ejemplares

Dos de los lados son paralelos $\left(y = -1 + \frac{2}{3}x \text{ y } 3y = 10 + 2x\right.$ tienen pendiente de $\left.\frac{2}{3}\right)$, y un tercer lado es perpendicular a ellos $\left(2y = -15 - 3x\right.$ con una pendiente de $\left.-\frac{3}{2}\right)$. El cuarto lado está contenido en la ecuación de la recta $5y = 21 - x$. Las diagonales caen sobre las rectas con ecuaciones $y = \frac{7}{4}(x - 1) + 4$ y $y = \frac{3}{11}(x + 5)$. Graficar y trazar indica que las diagonales se encuentran en aproximadamente $(-0.6, 1.2)$, lo cual no es ninguno de los puntos medios $(-1, 0.5)$ o $(0.5, 1.5)$. Las diagonales tienen largos de $\sqrt{65}$ y $\sqrt{130}$. Si se hace un triángulo recto bajando una perpendicular desde el vértice $(1, 4)$ hasta el lado paralelo opuesto, puede hallar que el seno del ángulo en el vértice $(6, 3)$ es $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Resuelve la ecuación $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = x$ para hallar que el ángulo es 45°. Por lo tanto, el ángulo en $(1, 4)$ será 135°.

# Capítulo 11 • Ejercicios de repaso

**Nombre** ________________________ **Periodo** __________ **Fecha** ______________

**1.** *(Lecciones 11.1–11.3, 11.6)* Traza los puntos $A(0, -2)$, $B(-3, 1)$ y $C(3, 4)$.

**a.** Halla la ecuación de la recta a través de $B$ que es paralela a $\overline{AC}$.

**b.** Halla el punto medio $\overline{AB}$.

**c.** Halla la ecuación de la recta que contiene la mediana del triángulo a través de $C$, y muestra que es perpendicular a la bisectriz de $\overline{AB}$.

**d.** Halla el largo de cada lado.

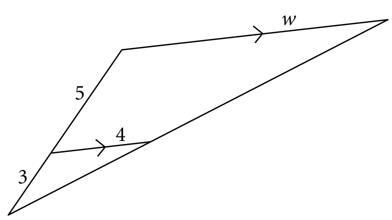
**e.** ¿Qué clase de triángulo es $ABC$?

**f.** Halla el área del triángulo $ABC$.

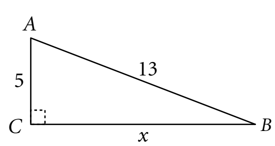
**2.** *(Lección 11.5)* Reescribe cada expresión con tan pocos símbolos de raíz cuadrada como sea posible, y sin paréntesis. Tu resultado final no debería tener ningún cuadrado perfecto como factor dentro del radical.

**a.** $\left(2\sqrt{6}\right)\left(3\sqrt{2}\right)$ **b.** $5\sqrt{3} - 2\sqrt{12}$ **c.** $\dfrac{2\sqrt{18}}{3\sqrt{2}}$

**3.** *(Lección 11.7)* Los dos triángulos mostrados abajo son similares. Escribe una proporción y resuélvela para hallar $w$.

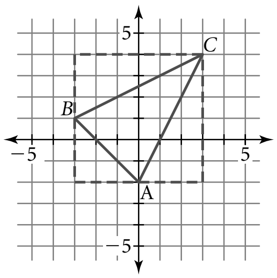



**4.** *(Lecciones 11.4, 11.8)* Usa el Teorema de Pitágoras para hallar $x$. Luego halla las siguientes razones:




**a.** $\tan A$ **b.** $\operatorname{sen} B$ **c.** $\cos B$

**1.**




**a.** El segmento $\overline{AC}$ tiene una pendiente de 2, así que escribe la ecuación de la recta con pendiente 2 que pasa a través del punto $(-3, 1)$. En la forma punto-pendiente, esto es $y - 1 = 2(x + 3)$, ó $y = 2(x + 3) + 1$.

**b.** La coordenada $x$ del punto medio de $\overline{AB}$ es $\frac{0 + -3}{2} = -1.5$, y la coordenada $y$ es $\frac{-2 + 1}{2} = -0.5$. El punto medio es $(-1.5, -0.5)$.

**c.** Halla la ecuación de la recta a través de los puntos $(3, 4)$ y $(-1.5, -0.5)$. La pendiente es $\frac{-0.5 - 4}{-1.5 - 3} = \frac{-4.5}{-4.5} = 1$, así que la ecuación es $y - 4 = 1(x - 3)$, ó $y = x + 1$. La pendiente de $\overline{AB}$ is $-1$ y la pendiente de la mediana es 1, así que el producto de las pendientes es $-1$. Por lo tanto las dos rectas son perpendiculares. La recta $y = x + 1$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$ porque es perpendicular a $\overline{AB}$ y pasa a través del punto medio de $\overline{AB}$.

**d.** *(Lección 11.6)* Usa la fórmula de distancia $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ para calcular cada largo. Por ejemplo:

$AB = \sqrt{(-3 - 0)^2 + [1 - (-2)]^2}$

$AB = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2}$

$AB = \sqrt{18}$, ó $3\sqrt{2}$

Para ayuda en cambiar $\sqrt{18}$ a $3\sqrt{2}$, mira más adelante en el Ejercicio 2.

Calcula los otros dos largos en una manera similar. Los largos son

$AC = \sqrt{45}$, ó $3\sqrt{5}$; y $BC = \sqrt{45}$, ó $3\sqrt{5}$.

**e.** El triángulo $ABC$ es isósceles porque $AC = BC$.

**f.** Dibuja un rectángulo alrededor del triángulo $ABC$ como se muestra en la gráfica para 1a. El rectángulo tiene un área de 36. Los triángulos rectángulos con hipotenusas $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ tienen áreas de 0.5(3)(6), ó 9 unidades cuadradas. El triángulo más pequeño en la derecha tiene un área de 0.5(3)(3), ó 4.5 unidades cuadradas. Resta las áreas de los triángulos del área del rectángulo: $36 - (9 + 9 + 4.5) = 13.5$. El área del triángulo $ABC$ es 13.5 unidades cuadradas.

**2. a.**

| | |
|---|---|
| $\left(2\sqrt{6}\right)\left(3\sqrt{2}\right) = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2}$ | Propiedad conmutativa de la multiplicación. |
| $= 2 \cdot 3\sqrt{6 \cdot 2}$ | Multiplicación de expresiones radicales. |
| $= 6\sqrt{12}$ | Multiplica. |
| $= 6\sqrt{4}\sqrt{3}$ | 4 es un cuadrado perfecto factor de 12. |
| $= 6 \cdot 2\sqrt{3}$ | Toma la raíz cuadrada. |
| $= 12\sqrt{3}$ | Multiplica. |

**b.**

| | |
|---|---|
| $5\sqrt{3} - 2\sqrt{12} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{4}\sqrt{3}$ | 4 es un cuadrado perfecto factor de 12. |
| $= 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$ | Toma la raíz cuadrada y multiplica. |
| $= (5 - 4)\sqrt{3}$ | Suma de expresiones radicales. |
| $= \sqrt{3}$ | Resta. |

**c.**

| | |
|---|---|
| $\frac{2\sqrt{18}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{9}\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ | 9 es un cuadrado perfecto factor de 18. |
| $= \frac{2 \cdot 3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ | Toma la raíz cuadrada. |
| $= 2$ | Reduce. |

**3.** Las proporciones pueden variar.

| | |
|---|---|
| $\frac{w}{4} = \frac{5 + 3}{3}$ | Proporción a resolver. |
| $4 \cdot \frac{w}{4} = 4 \cdot \frac{8}{3}$ | Multiplica ambos lados por 4. |
| $w = \frac{32}{3}$, ó $10\frac{2}{3}$ | Multiplica. |

**4.**

| | |
|---|---|
| $5^2 + x^2 = 13^2$ | Ecuación a resolver. |
| $25 + x^2 = 169$ | Cuadra cada término. |
| $x^2 = 144$ | Resta 25 de ambos lados. |
| $x = 12$ | Toma la raíz cuadrada de 144. |

Sólo la raíz cuadrada positiva es una solución porque $x$ es el largo de un segmento.

**a.** $\tan A = \frac{opuesto}{adyacente} = \frac{12}{5}$

**b.** $\text{sen } B = \frac{opuesto}{hipotenusa} = \frac{5}{13}$

**c.** $\cos B = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{12}{13}$